

استفاده از تئوری نگاشت همدیس در بهینه‌یابی موقعیت و زاویه قرارگیری دیواره‌های آب‌بند در سدهای انحرافی

سعید احمدیان¹، محمود فغفور مغربی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
2- استاد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

* maghrebi@um.ac.ir

چکیده - حرکت آب در محیط متخلخل با معادله عمومی لاپلاس¹ بیان می‌شود. در این مقاله با استفاده از تئوری نگاشت همدیس² و روابط تحلیلی، موقعیت و زوایای قرارگیری بهینه دیواره‌های آب‌بند در سدهای انحرافی برای حداقل ساختن گرادیان‌های خروجی و زیرفشار مورد بررسی قرار گرفته و جواب‌های بدست آمده از این روش با روش‌های عددی نظیر روش اجزاء محدود مقایسه شده است. برای تحلیل جریان تراوش از زیر سازه‌های هیدرولیکی در روش تحلیلی از توابع مختلط استفاده می‌گردد. تبدیل شوارتز-کریستوفل³ یکی از روش‌های نگاشت همدیس است. با استفاده از تبدیل شوارتز-کریستوفل ناحیه فیزیکی زیر سازه هیدرولیکی در صفحه z و همچنین ناحیه جریان زیر سازه هیدرولیکی در صفحه w به روی نیم صفحه کمکی t نگاشت می‌گردد. نهایتاً با استفاده از این تبدیل رابطه بین صفحه z و w بدست خواهد آمد و با استفاده از این رابطه می‌توان تغییرات زیرفشار در نقاط مختلف زیر سازه و تغییرات گرادیان خروجی در امتداد پایین‌دست سازه هیدرولیکی را بدست آورد. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که بهترین موقعیت آب‌بند به منظور کاهش زیرفشار، بالادست کف‌بند بوده و زاویه بهینه قرارگیری آن نسبت به افق با افزایش مقدار s/b که در آن b طول بند و s طول آب‌بند است، کاهش می‌یابد. این زاویه برای $s/b = 1/3$ معادل 60 درجه است. به منظور کاهش مقدار گرادیان هیدرولیکی خروجی در امتداد پایین‌دست، موقعیت بهینه آب‌بند در پایین‌دست است. در این حالت زاویه بهینه آب‌بند برای $x/b \leq 0.6$ که در آن x فاصله از انتهای پایین‌دست سازه است، زوایای 10، 30 و 60 درجه بوده و بعد از آن زوایای بزرگتر از 60 درجه بهینه هستند. برای قرارگیری آب‌بند در بالادست و وسط کف‌بند نیز محاسبات انجام گرفته و تمامی حالت‌ها با روش اجزاء محدود مقایسه شده که نشان دهنده تطابق خوب نتایج با یکدیگر است.

کلیدواژگان: سدهای انحرافی، دیواره‌های آب‌بند، نگاشت همدیس، تبدیل شوارتز-کریستوفل، بهینه‌یابی.

1- مقدمه

می‌گردد. پدیده دوم می‌تواند منجر به ناپایداری کلی سازه گردد که خود می‌تواند به شکست دال کف و یا واژگونی آن منتهی گردد. نیروی حاصل از زیرفشار مقاومت برشی بین سد و پی را کاهش می‌دهد و باعث

تراوش و زیرفشار دو پدیده مهم در قرارگیری یک سازه هیدرولیکی به‌عنوان سد آب‌بند در برابر گذر جریان می‌باشند. پدیده نخست می‌تواند منجر به ناپایداری در تکیه‌گاه سازه شود که متعاقب آن باعث فرونشست سازه بر روی مجرای ایجاد شده ناشی از پدیده رگاب شدن

¹ Laplace

² Theory of Conformal Mapping

³ Schwartz-Christoffel

گسیختگی ذکر شده ارائه گردیده است. در بررسی جریان نشت، رابطه تبدیل ناحیه پتانسیل مختلط به صفحه فیزیکی مسأله (میدان جریان نشت) با استفاده از نگاشت همدیس به دست آمده است. در تحقیق حاضر برای اولین بار یک بند انحرافی مجهز به آب‌بند تحت زوایای مختلف که بر روی بستر آبرفتی با عمق نامحدود می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. هدف از این تحقیق به دست آوردن رابطه تحلیلی گرادیان هیدرولیکی و در نهایت یافتن موقعیت و زاویه بهینه قرارگیری آب‌بند با استفاده از تئوری نگاشت همدیس می‌باشد. برای این منظور از تبدیل شوارتز- کریستوفل و صفحه کمکی برای یافتن رابطه نگاشت صفحه فیزیکی مسأله و صفحه پتانسیل مختلط استفاده شده است. به عنوان یک مسأله عملی سدی انحرافی با عرض کف $b=30\text{m}$ ، هد آب پشت سد $h=20\text{m}$ و زوایای مختلف قرارگیری دیواره آب‌بند در سه موقعیت بالادست، وسط کف‌بند و انتهای پایین‌دست سد، مورد ارزیابی قرار گرفته و جواب‌های حاصله با روش اجزاء محدود (نرم‌افزار Geo Studio) مقایسه شده است.

2- معادلات حاکم و روش‌های حل

جواب معادله عمومی جریان آب در خاک یا معادله لاپلاس توابع پتانسیل سرعت $\varphi(x,y)$ و جریان $\psi(x,y)$ می‌باشند. مشتق تابع پتانسیل سرعت در یک جهت مشخص، نشان‌گر سرعت تراوش در آن جهت است (Reddi, 2003). لذا تابع $\varphi(x,y)$ نشان دهنده حاصل ضرب نفوذپذیری k و بلندای هیدرولیکی h است، یعنی در یک جریان پتانسیل تابع پتانسیل را می‌توان به صورت $\varphi = -kh$ نمایش داد. در عمل معمولاً از علامت منفی صرف‌نظر شده است، بر این اساس مؤلفه‌های سرعت‌های جریان دو بعدی را می‌توان بصورت روابط (1) و (2) نوشت (Harr, 1962):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x} = v_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -k \frac{\partial h}{\partial y} = v_y \quad (2)$$

که در آنها v_x و v_y سرعت‌های تراوش به ترتیب در جهات x و y می‌باشند. به طور مشابه برای تابع جریان $\psi(x,y)$

ایجاد تنش کششی می‌شود و ضریب اطمینان در مقابل واژگونی و لغزش را کاهش خواهد داد (Reddi, 2003). از جمله اقداماتی که برای جلوگیری از پدیده رگاب شدن، کاهش گرادیان خروجی و دبی نشت از زیر سازه‌های آبی صورت می‌گیرد، احداث دیواره‌های آب‌بند در موقعیت‌های مناسب زیر سازه، احداث لایه‌های زهکش و فیلتر در موقعیت‌های مناسب و یا استفاده از پتوهای نفوذناپذیر در بالادست سدها می‌باشد (شیخ رضازاده نیکو و همکاران، 1391). (Polubarinova- Kochina (1962) حالت‌های مختلف جریان نشت از زیر بندهای انحرافی را با شرایط مختلف محیط محدود و نامحدود مورد بررسی قرار داده است. در مبانی نظری مقاله حاضر نیز این مرجع معیار قرار گرفته است. مجتهدی و فغفور مغربی (1388) با استفاده از روش تحلیلی، نشت را از کانال‌های با مقطع منحنی شکل مورد بررسی قرار داده‌اند. مسائل گوناگون تراوش از پی سازه‌های هیدرولیکی با استفاده از روش‌های تحلیل توسط هار (Harr (1962) مورد بررسی قرار گرفته است. (Ijam (1994) تراوش از پی سازه‌های هیدرولیکی را همراه با دیواره آب‌بند مایل در پایین‌دست سازه هیدرولیکی در شرایط محیط نامحدود زیرین سازه با استفاده از روش نگاشت مورد بررسی قرار داده است. قابل ذکر است که مقاله حاضر، حل تحلیلی حالت کلی‌تری از مسأله Ijam می‌باشد. (Fil'chakov (1959) نیز حل تحلیلی جریان نشت را با استفاده از تئوری نگاشت همدیس برای بندهای با عمق محدود محیط زیرین، آب‌بندهای نامساوی، کف مدفون، پتوی بالادست و آب‌بند میانی ارائه کرده است. (Zheng-yi, and Wu, JTH. (2006) تراوش از پی سازه‌های هیدرولیکی را همراه با دیواره‌های سپری در خاک‌های لایه‌ای مورد تحلیل قرار داده‌اند. (Veiskarami and Fadaie (2017) با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی، پایداری سپری‌های قائم در خاک‌های دانه ای را در برابر گسیختگی عمیق بررسی کرده‌اند. در این بررسی، میدان جریان نشت که معادله لاپلاس بر آن حاکم است، به صورت یک راه حل تحلیلی مستقل توسط روش نگاشت همدیس و میدان تنش توسط راه حل عددی به دست آمده و نمودارهای طراحی برای پایداری در برابر

می‌توان روابط (3) و (4) را نوشت (Harr, 1962):

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x \quad (4)$$

معادلات فوق به نام معادلات کوشی-ریمان نامیده می‌شوند. مجموع منحنی‌هایی که توسط تابع $\phi(x,y)$ نشان داده می‌شوند به نام خطوط هم فشار و منحنی‌هایی که توسط تابع $\psi(x,y)$ نشان داده می‌شوند به نام خطوط جریان نامیده می‌شوند. اگر این دو مجموعه منحنی‌های عمود برهم بصورت ترسیمی در محدوده جریان رسم شوند، معادله لاپلاس بصورت گرافیکی حل می‌شود.

برای معادلات کوشی-ریمان می‌توان یک تابع پتانسیل مختلط بنام w به شکل رابطه (5) تعریف نمود (Harr, 1962):

$$w = \phi + i\psi \quad (5)$$

که در آن w یک تابع تحلیلی مختلط بصورت $w = f(z)$ است که z به نوبه خود یک تابع مختلط بصورت $z = x + iy$ است، یعنی هر نقطه روی صفحه z می‌تواند توسط یک تابع تحلیلی به صفحه w نگاشت شود. یکی از تکنیک‌های این روش استفاده از تبدیل شوارتز-کریستوفل می‌باشد. در مواردیکه محدوده جریان از لحاظ هندسی پیچیده است، خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل از معادلات بیضی، سهمی و هذلولی تبعیت نمی‌کنند. Pavlovsky به نقل از Harr (1962) مسائلی را مطرح نمود

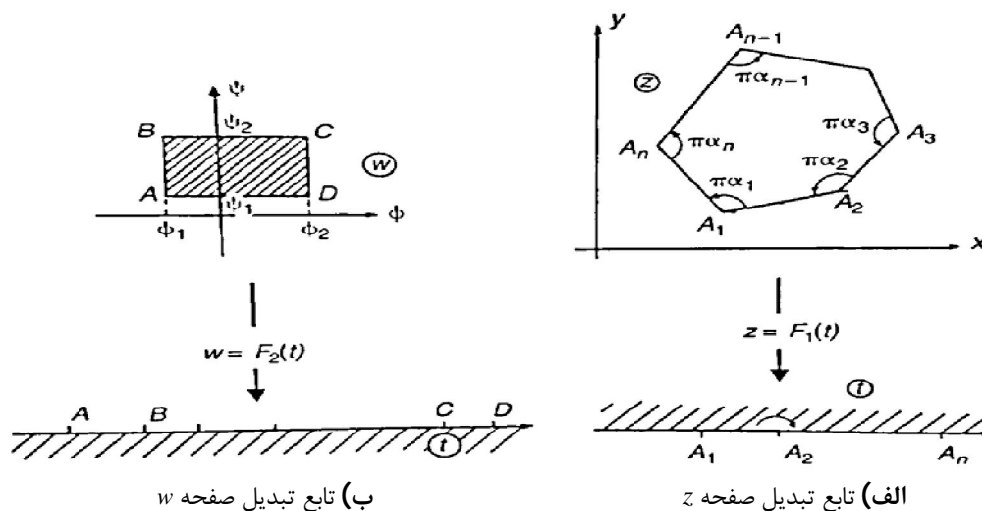
که ناحیه جریان در صفحه مختلط z با یک چند ضلعی نشان داده می‌شود. این چند ضلعی توسط یک چند ضلعی دیگر به صفحه پتانسیل مختلط $w = \phi + i\psi$ نگاشت می‌گردد. همان‌طور که در شکل 1 نشان داده شده است، با توجه به تبدیل شوارتز-کریستوفل ناحیه جریان در هر یک از صفحات w و z می‌تواند به نیم صفحه کمکی t نگاشت شود. اگر توابع تبدیل با F_1 و F_2 نشان داده شوند، رابطه (6) بدست می‌آید (Harr, 1962):

$$w = F_2(t), z = F_1(t) \quad (6)$$

با حذف متغیر t بین توابع F_1 و F_2 تابع $w = F(z)$ بدست می‌آید. با استفاده از تابع w می‌توان تمام اجزاء جریان در محدوده حقیقی را تعیین نمود. برای اینکه این چند ضلعی با رئوس $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ از صفحه z به نیم صفحه t نگاشت شود، تبدیل شوارتز-کریستوفل شکل زیر را به خود می‌گیرد (Harr, 1962):

$$z = M \int (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + N \quad (7)$$

که در آن $M, N, a_1, a_2, \dots, a_n$ مقادیر ثابت هستند. α_n تا α_1 مقادیر زوایای داخلی چند ضلعی برحسب رادیان می‌باشند. با استفاده از رابطه شوارتز-کریستوفل رئوس چند ضلعی مورد نظر روی محور حقیقی نیم صفحه t نگاشت می‌گردد، برای تبدیل صفحه w به نیم صفحه t نیز به همین ترتیب از تبدیل شوارتز-کریستوفل استفاده می‌شود (شکل 1) (Brown and Churchill, 2009).



شکل 1 توابع تبدیل شوارتز-کریستوفل (Harr, 1962)

3- راه حل تحلیلی

برای بدست آوردن روابط تحلیلی، مقطع سد انحرافی مطابق شکل 2 در نظر گرفته می‌شود. برای تحلیل جریان زیر سد انحرافی با استفاده از رابطه (7) می‌توان ناحیه زیر سازه هیدرولیکی را از صفحه z به روی نیم صفحه حقیقی t نگاشت نمود. برای این منظور نقاط مورد نظر در صفحه z که روی نیم صفحه t نشان داده شده اند، مشخص می‌شوند (شکل 3).

در شکل 2، $\pi\theta^*$ زاویه آببند نسبت به افق در جهت عقربه ساعت بر حسب رادیان است. در رابطه (7) سه نقطه بطور دلخواه روی نیم صفحه t مشخص می‌شوند (Floryan and Zemach, 1986). برای سهولت در انجام محاسبات نقاط 1 و 2 به ترتیب روی $t_1 = +1$ و $t_2 = -1$ انتقال می‌یابند. نقطه 3 به دلیل متغیر بودن طول و زاویه آببند، روی نقطه $t_a = a$ انتقال داده می‌شود که بعداً مقدار a با استفاده از شرایط مرزی مسئله مشخص می‌شود. نقاط A و B به ترتیب دارای مختصات $t_A = -L_A$ و $t_B = L_B$ هستند که مقدار L_A و L_B نیز از روی شرایط مرزی مسئله قابل محاسبه است. لذا مطابق شکل 3 در صفحه z مجموعاً 5 نقطه مشخص

شده که با استفاده از رابطه شوارتز-کریستوفل روی نیم صفحه t منتقل می‌شوند. نقاط A و B به دلیل داشتن زاویه π در صفحه z در تبدیل وارد نمی‌شوند. با جایگزینی نقاط تبدیل در رابطه (7)، تبدیل مورد نظر شکل رابطه (8) را بخود می‌گیرد:

$$\frac{dz}{dt} = M(t+1)^{-\theta^*} (t-b)^{\theta^*-1} (t-a)^1 \quad (8)$$

همچنین با توجه به رابطه ارائه شده توسط Verigin به نقل از Harr (1962) برای سپری‌ها می‌توان رابطه (9) را نوشت:

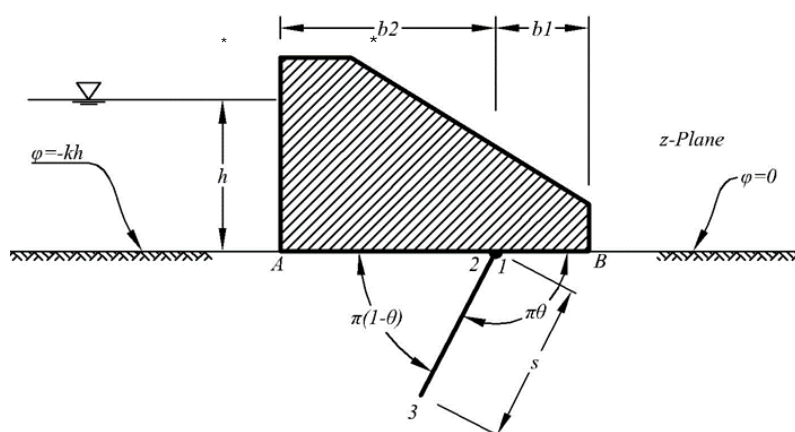
$$z = Ce^{i\pi\alpha_n} (a_1 - t)^{\alpha_n - \alpha_1} (a_2 - t)^{\alpha_1 - \alpha_2} \dots (\alpha_k - t)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \quad (9)$$

برای آببند مورد نظر زیر سد انحرافی به دلیل عدم وجود زاویه مشخصه $\alpha_n = 0$ است، لذا رابطه (9) به شکل رابطه (10) در می‌آید:

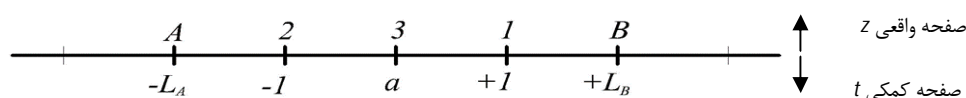
$$z = C(1-t)^{\theta^*} (1+t)^{1-\theta^*} \quad (10)$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه (10) و مساوی قرار دادن آن با رابطه (8)، رابطه (11) بدست می‌آید:

$$M(t+1)^{-\theta^*} (t-b)^{\theta^*-1} (t-a)^1 = -C(1-t)^{\theta^*-1} (1+t)^{-\theta^*} (2\theta^* + t - 1) \quad (11)$$



شکل 2 صفحه فیزیکی مسأله (صفحه z)



شکل 3 صفحه کمکی t

خواهد شد:

$$\frac{dw}{dt} = M_1(t + L_A)^{-\frac{1}{2}}(t - L_B)^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

با انتگرال گیری از رابطه (16)، رابطه (17) بدست می آید:

$$\begin{aligned} w &= M_1 \int \frac{dt}{(t + L_A)^{\frac{1}{2}}(t - L_B)^{\frac{1}{2}}} + N_1 \\ &= iM_1 \sin^{-1} \frac{2t + L_A - L_B}{L_A + L_B} + N_1 \\ &= M_2 \sin^{-1} \frac{t + \lambda_1}{\lambda} + N_1 \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{(L_A - L_B)}{2}, \lambda = \frac{(L_A + L_B)}{2}$$

برای تعیین مقادیر M_2 و N_1 از شرایط مرزی بین صفحه w و z و جایگزینی در رابطه (17)، استفاده می شود:

در نقطه A:

$$t = -L_A, \quad w = -kh \rightarrow M_2 = \frac{kh}{\pi} \quad (18)$$

در نقطه B:

$$t = L_B, \quad w = 0 \rightarrow N_1 = -M_2 \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

لذا رابطه کلی بین صفحه w و t بصورت (20) بدست می آید:

$$w = \frac{kh}{\pi} \sin^{-1} \frac{t + \lambda_1}{\lambda} - \frac{kh}{2} \quad (20)$$

برای محاسبه زیر فشار از رابطه کلی فشار و تلفیق آن با رابطه (20)، رابطه (21) حاصل می گردد:

$$\varphi = -k \left(\frac{p}{\gamma_w} - y \right) + c \quad (21)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی فشار در بالادست و پایین دست مقدار $c = 0$ حاصل می شود. همچنین خط جریان در امتداد کف سازه بین نقاط A و B معادل $\psi = 0$ می باشد، لذا $w = \varphi$ خواهد بود. رابطه کلی زیر فشار سازه به صورت (22) می باشد:

$$\frac{p}{\gamma_w} = \frac{h'}{h} = \frac{1}{2} + y - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{t + \lambda_1}{\lambda} \quad (22)$$

که در آن y ، بلندای فشار در عمق پی را نشان می دهد. برای تعیین L_A و L_B از رابطه (14) استفاده می شود:

در نقطه B:

$$\begin{aligned} t &= L_B, \quad z = b_1 \\ \frac{b_1}{s} &= \left[\left(\frac{L_B - 1}{2\theta} \right)^\theta \left(\frac{L_B + 1}{2 - 2\theta} \right)^{1-\theta} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

با قرار دادن مقادیر مختلف s ، θ و b_1 مقدار L_B از رابطه

با توجه به اینکه عبارت سمت راست و چپ رابطه (11) هم برابرند، بنابراین $M = -C$ و $a = 1 - 2\theta^*$ خواهند بود. برای تعیین C از شرایط مرزی بین صفحه z و t استفاده می شود.

در نقطه a $t = a$ و $z = r \cdot e^{-\pi\theta^*i}$ می باشد. در صورتی که طول سپری $r = s$ باشد، مطابق رابطه (10)، می توان رابطه (12) را نوشت:

$$s \cdot e^{-\pi\theta^*i} = C(1 - t)^{\theta^*}(1 + t)^{1-\theta^*} \quad (12)$$

لذا:

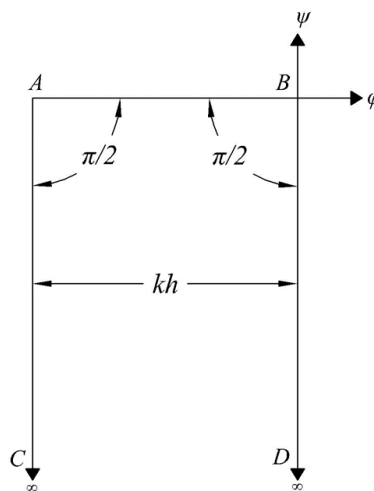
$$C = \frac{S \cdot e^{-\pi\theta^*i}}{(1 - a)^{\theta^*}(1 + a)^{1-\theta^*}} \quad (13)$$

با جایگذاری مقدار C در رابطه (10)، تبدیل عمومی بین صفحه t و z مطابق رابطه (14) بدست می آید:

$$z = s \cdot e^{-\pi\theta^*i} \left[\left(\frac{1 - t}{1 - a} \right)^{\theta^*} \left(\frac{1 + t}{1 + a} \right)^{1-\theta^*} \right] \quad (14)$$

برای تبدیل ناحیه جریان زیر سازه هیدرولیکی از صفحه پتانسیل مختلط w شکل 4 به نیم صفحه t مانند تبدیل صفحه z به صفحه t از تبدیل شوارتز-کریستوفل استفاده می شود (Harr, 1962).

$$\frac{dw}{dt} = M_1(t - a)^{\frac{A}{\pi}-1}(t - b)^{\frac{B}{\pi}-1}(t - c)^{\frac{C}{\pi}-1} \dots \quad (15)$$



شکل 4 صفحه پتانسیل مختلط (صفحه w)

جریان زیر سازه از نقطه A شروع می شود و تا نقطه B امتداد می یابد، لذا در صفحه w دو نقطه A و B با زاویه 90 درجه خواهند بود. با جایگذاری مقادیر زوایای دو نقطه A و B، رابطه تبدیل ناحیه جریان به صورت رابطه (16)

Geo Studio 2007 و زیر مجموعه $Seep/w$ که مبتنی بر روش اجزاء محدود می‌باشد، استفاده شده و برای تمامی حالات و زوایا تحلیل صورت گرفته است. با توجه به اینکه در این نرم‌افزار مقادیر زیرفشارها به عمق پی و المان‌بندی حساس می‌باشند، لذا عمق پی تا فاصله‌ای که تغییرات خطوط هم پتانسیل روی نتایج تأثیر نداشته باشند، ادامه یافته و نیز در مرزها از المان‌های نامحدود استفاده شده است. به منظور به کارگیری نرم‌افزار مذکور، ابتدا هندسه مدل ترسیم گردیده و در گام بعد مصالح آبرفتی که سد روی آن قرار گرفته به نرم‌افزار معرفی می‌گردد. از آنجا که تحلیل روی پی با عمق نامحدود و تراوا در نظر گرفته شده، لذا ضریب نفوذپذیری آبرفت برای خاک درشت دانه لحاظ گردیده است. سپس شرایط مرزی برای نرم‌افزار معرفی می‌شود که در بالادست هد آب و در پایین‌دست شرایط معادل فشار صفر (Potential Seepage Face) در نظر گرفته شده است. آنگاه شبکه‌بندی مدل انجام گرفته که در آن از المان‌های چهار گرهی و مثلثی سه گرهی استفاده شده است. این شبکه‌بندی در شکل 5 مشاهده می‌شود و شکل 6 نشان دهنده ترکیب خطوط جریان و هم پتانسیل بر روی شبکه‌بندی محیط متخلخل می‌باشند.

5- نتایج و بحث

برای مطالعه روابط بدست آمده از روش تئوری نگاشت، موقعیت‌های مختلفی برای قرارگیری دیواره آب‌بند از قبیل بالادست سد، وسط کف‌بند و پایین‌دست سد و همچنین زوایای مختلف قرارگیری دیواره آب‌بند در هر یک از موقعیت‌های ذکر شده در نظر گرفته می‌شود. روابط بدست آمده برای یک سد انحرافی به طول $b=30m$ ، بلندای آب پشت سد برابر با $h=20m$ و $s/b = 1/3, 2/3, 1$ برای مطالعه قرار گرفته است. برای محاسبه بلندای زیرفشار از رابطه (22) استفاده شده است و مقدار h برابر با 20 متر و γ برابر با صفر در نظر گرفته شد. با انجام محاسبات، نتایج تغییرات زیرفشار برای حالات مختلف قرارگیری آب‌بند در قالب نمودارهای بی بعد h'/h نمایش داده شده‌اند که h' عبارت از بلندای زیرفشار در نقاط مختلف زیر سازه و h بلندای آب موجود پشت سد هستند.

(23) حاصل می‌گردد. به همین ترتیب برای L_A می‌توان نوشت:

در نقطه A :

$$t = -L_A \text{ و } z = -b_2$$

$$\frac{-b_2}{s} = \left[\left(\frac{L_A - 1}{2 - 2\theta} \right)^{1-\theta} \left(\frac{L_A + 1}{2\theta} \right)^\theta \right] \quad (24)$$

با قرار دادن مقادیر مختلف s ، θ و b_2 مقدار L_A از رابطه (24) حاصل می‌گردد.

خطر نشان می‌شود برای بدست آوردن رابطه گرادیان‌های خروجی در پایین‌دست سازه هیدرولیکی (سد انحرافی) از رابطه عمومی گرادیان در هر نقطه در محیط همگن استفاده می‌شود (Harr, M. E., 1962):

$$i_e = -\frac{dh}{ds'} = \frac{1}{k} \frac{d\phi}{ds'} = \frac{1}{k} \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dz} \frac{dz}{ds'} \quad (25)$$

در رابطه (25)، s' نشان دهنده خط جریان در نقطه مورد نظر می‌باشد. با تعریف زاویه بین محور x و خط جریان s' بر حسب زاویه α ، رابطه $\frac{dz}{ds'} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ بدست می‌آید. نظر به اینکه خطوط جریان در پایین‌دست سازه در قسمت خروجی عمود بر سطح است و دارای مقدار ثابتی هستند، لذا $\frac{dz}{ds'} = 1$ و $\frac{d\phi}{dt} = \frac{dw}{dt}$ خواهد بود، نتیجتاً رابطه (25) به شکل (26) تغییر می‌یابد:

$$i_e = \frac{i}{k} \left(\frac{dw}{dt} \frac{dt}{dz} \right) \quad (26)$$

با جایگذاری معکوس مشتق رابطه (14) و همچنین مشتق رابطه (20) در رابطه (26)، رابطه (27) بدست می‌آید:

$$\frac{dw}{dt} = M_1 (t + L_A)^{-\frac{1}{2}} (t - L_B)^{-\frac{1}{2}},$$

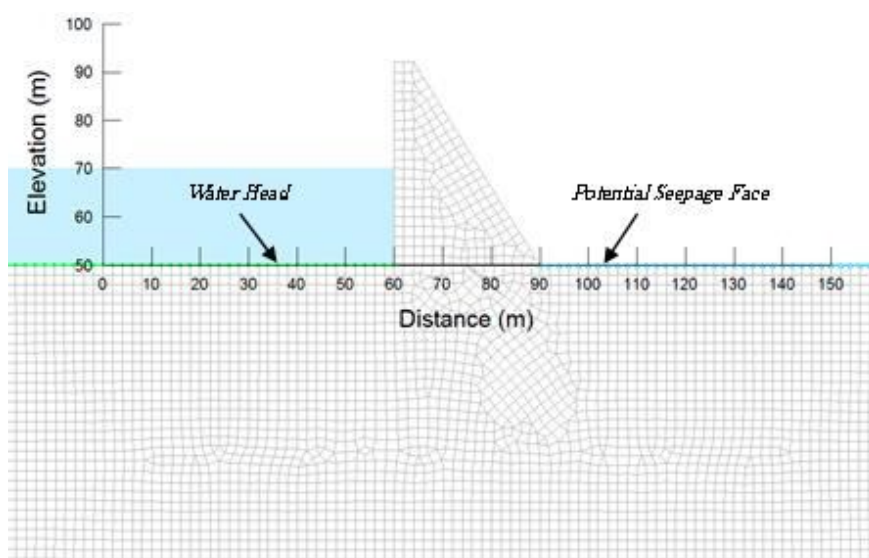
$$M_1 = \frac{kh}{i\pi}, \quad \frac{dt}{dz} = \frac{(1+t)^\theta (t-1)^{1-\theta}}{M(t-a)} \quad (27)$$

که در آن $M = -C$ ، $C = \frac{s.e^{-\pi\theta i}}{(1-a)^\theta (1+a)^{1-\theta}}$ ، $a = 1 - 2\theta$ می‌باشند. نهایتاً رابطه عمومی برای محاسبه گرادیان خروجی در پایین‌دست سازه به شکل رابطه (28) حاصل می‌گردد:

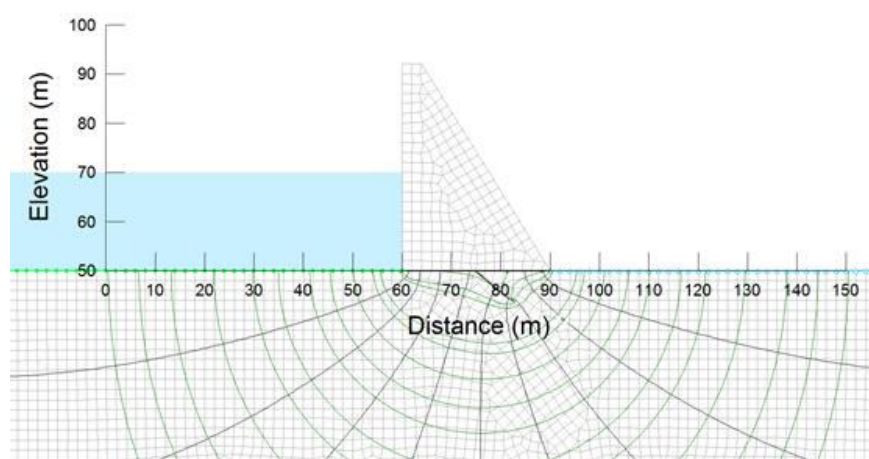
$$i_e = \left(\frac{h}{\pi \cdot s} \right) \left(\frac{(2-2\theta)^{1-\theta} (2\theta)^\theta (1+t)^\theta (t-1)^{1-\theta}}{(t-1+2\theta)(t+L_A)^{\frac{1}{2}}(t-L_B)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (28)$$

4- روش مدل‌سازی اجزاء محدود در نرم‌افزار Geo Studio 2007

به منظور مقایسه نتایج حاصل از روش تحلیلی از نرم‌افزار



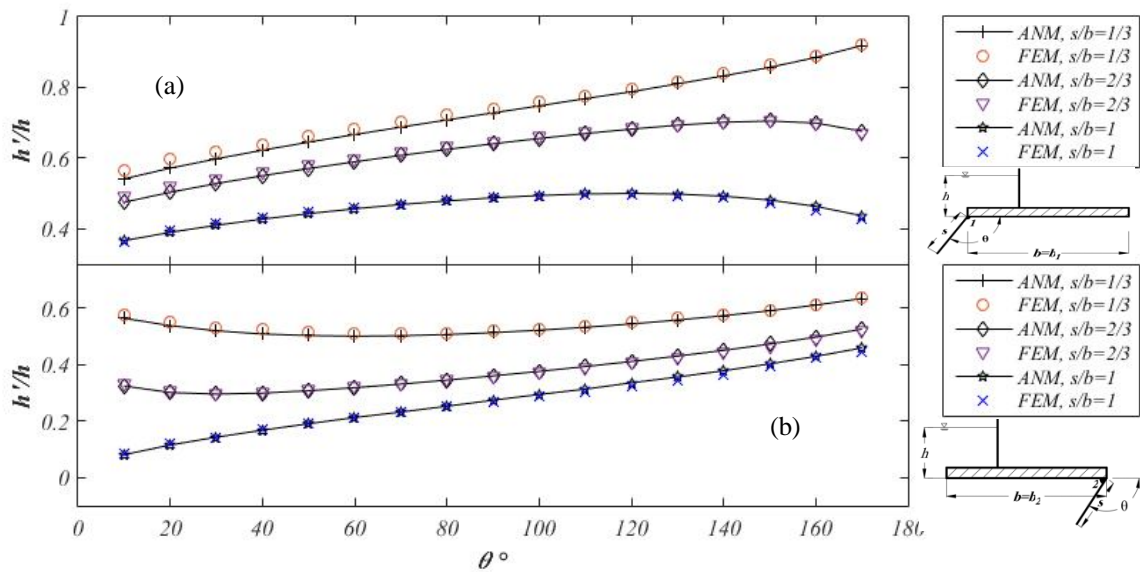
شکل 5 شبکه‌بندی و شرایط مرزی در نرم‌افزار Seep/W



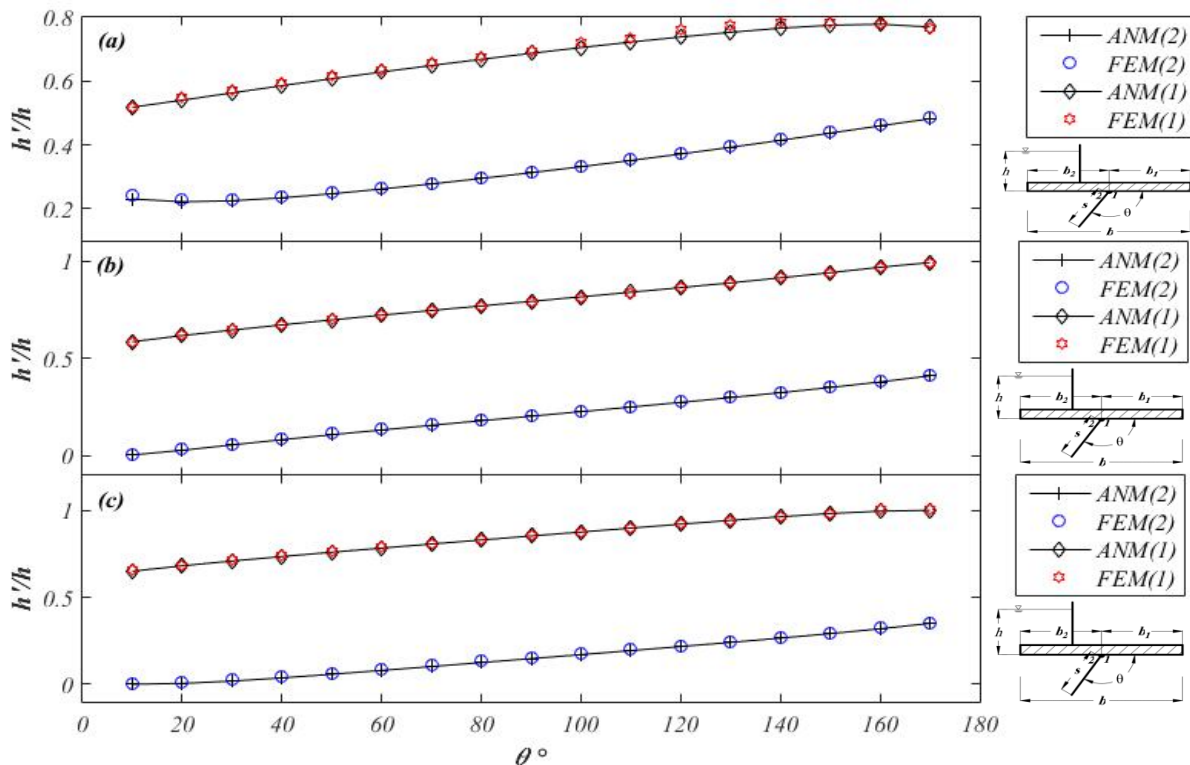
شکل 6 خطوط جریان و هم‌پتانسیل روی شبکه‌بندی در نرم‌افزار Seep/W (به موقعیت آب‌بند مایل در زیر سد توجه شود)

می‌دهد. همچنین برای $s/b = 1$ از ابتدا با افزایش زاویه تمایل، مقدار زیرفشار نیز افزایش خواهد یافت. این تغییرات برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در پایین‌دست سد انحرافی ($b_2/b = 1$) برای نقطه 2 (بالادست دیواره آب‌بند) در شکل 7 (b) نشان داده شده، که برای $s/b = 1$ تغییرات از ابتدا روند افزایشی دارد. برای $s/b = 1/3, 2/3$ این تغییرات تا زاویه 140 درجه افزایش را نشان داده و سپس کاهش می‌یابد که بیشترین کاهش در این حالت در زاویه 170 درجه رخ می‌دهد. در شکل 8 تغییرات زیرفشار نسبت به زاویه قرارگیری دیواره آب‌بند در نقاط 1 و 2 (پایین‌دست و بالادست دیواره آب‌بند) برای $s/b = 1/3, 2/3, 1$ نشان داده شده است.

مقادیر بدست آمده از تئوری نگاشت با مقادیر بدست آمده از مدل سد انحرافی با ابعاد یکسان در نرم‌افزار (Geo Studio 2007) مقایسه شده است که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند. شکل 7 (a) نشان دهنده تغییرات زیرفشار در نقطه 1 (پایین‌دست آب‌بند) برای حالتی که آب‌بند در بالادست سد انحرافی ($b_2/b = 0$) در زوایای مختلف قرار گرفته، است، می‌باشد. در این شکل، برای $s/b = 1/3$ زیرفشار از زاویه تمایل 10 تا 170 درجه روند صعودی دارد. در این حالت کمترین میزان زیرفشار برای زاویه 10 درجه بوده و با افزایش آن، زیرفشار نیز افزایش خواهد یافت. این تغییرات برای $s/b = 2/3$ در ابتدا تا زاویه 40 درجه روند نزولی داشته و سپس افزایش فشار را نشان



شکل 7 (a) نمودار تغییرات زیرفشار نسبت به زاویه دیواره آببند در نقطه 1 (پایین دست دیواره آببند)، با استفاده از FEM روش اجزاء محدود، ANM روش تحلیلی برای $s/b = 1/3, 2/3, 1$ و $b_2/b = 0$ ، نمودار تغییرات زیرفشار نسبت به زاویه دیواره آببند در نقطه 2 (بالا دست دیواره آببند)، با استفاده از FEM روش اجزاء محدود، ANM روش تحلیلی برای $s/b = 1/3, 2/3, 1$ و $b_2/b = 1$



شکل 8 نمودار تغییرات زیرفشار نسبت به زاویه دیواره آببند در نقاط 1 و 2، روش اجزاء محدود، ANM روش تحلیلی در حالت $b_2/b = 1/2$ (a) $s/b = 1/3$ ، (b) $s/b = 2/3$ و (c) $s/b = 1$

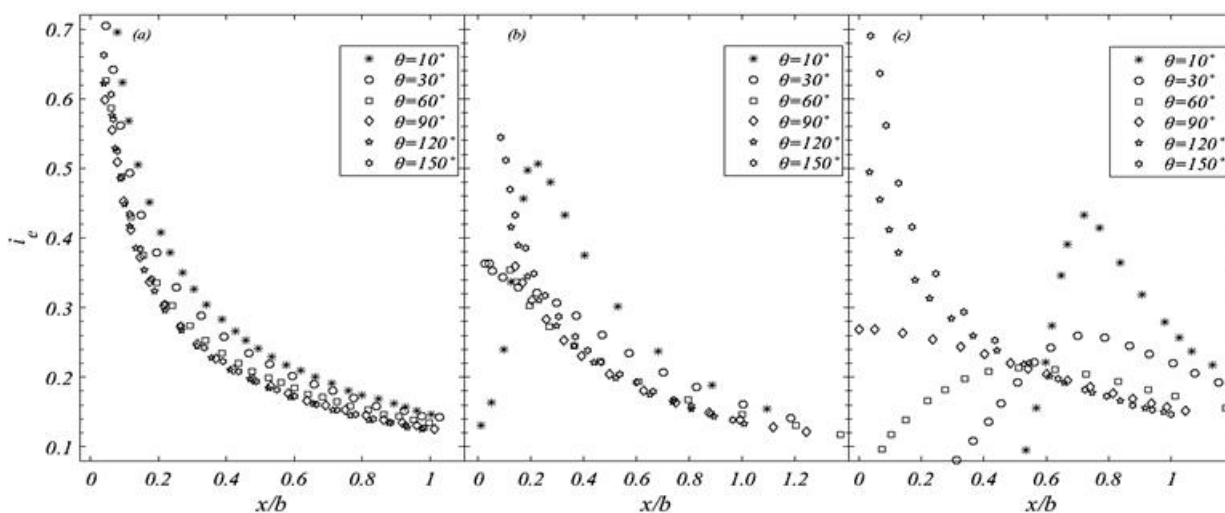
با افزایش طول دیواره آببند، زیرفشار در نقطه 1 کاهش یافته و برعکس در نقطه 2 با افزایش طول دیواره آببند

این تغییرات با استفاده از دو روش اجزاء محدود (FEM) و روش تحلیلی (ANM) محاسبه شده است. مطابق شکل 8

به زاویه تمایل دیواره آب بند برای حالت قرارگیری دیواره در وسط کفبند سازه را نشان می‌دهند. برای محاسبه تغییرات گرادیان‌های خروجی در پایین دست سازه از معادله (28) با فرض $h=20\text{m}$ و $s/b = 1/3, 2/3, 1$ استفاده می‌شود. بعد از انجام محاسبات نمودارهای حاصله از روش تئوری نگاشت برای حالت‌های مختلف تولید شده و سپس با داده‌های بدست آمده از روش اجزاء محدود (Anonymus (2007) (نرم‌افزار Geo Studio 2007) مقایسه شده است.

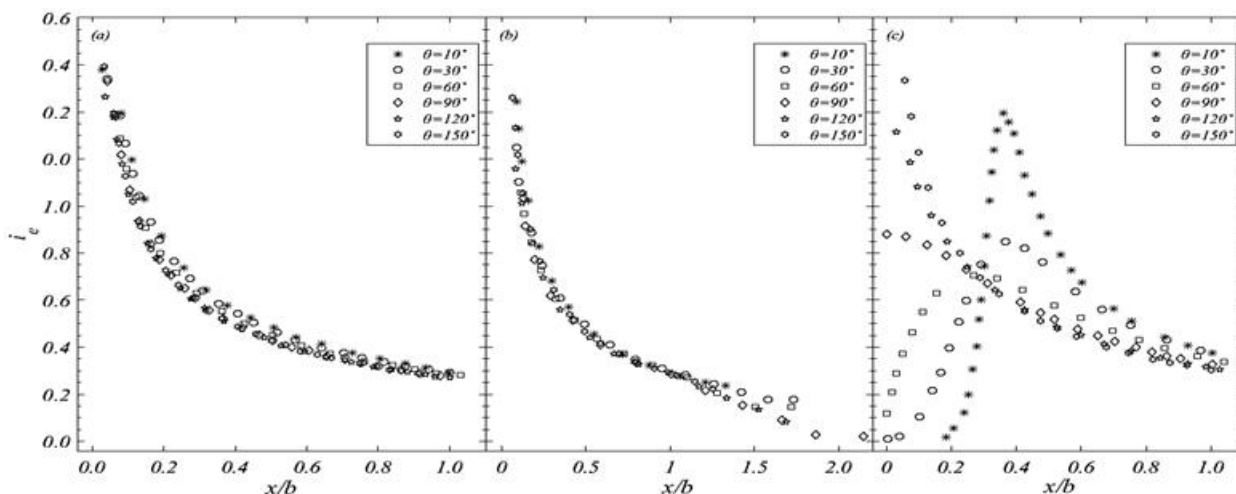
زیرفشار افزایش را نشان می‌دهد که چنین روندی قابل پیش بینی بود. با بررسی تغییرات زیرفشار نسبت به زاویه قرارگیری دیواره آب‌بند، چنانچه در شکل 8 نشان داده شده، با افزایش زاویه تمایل نسبت به خط افق زیرفشار در نقطه 1 روند صعودی داشته، اما این تغییرات در نقطه 2 با افزایش زاویه تمایل تا زاویه 150 افزایشی بوده و بعد از آن کاهش می‌یابد.

شکل‌های 9 تا 11 تغییرات زیرفشار نقطه 1 (پایین دست دیواره آب‌بند) و نقطه 2 (بالادست دیواره آب‌بند) نسبت



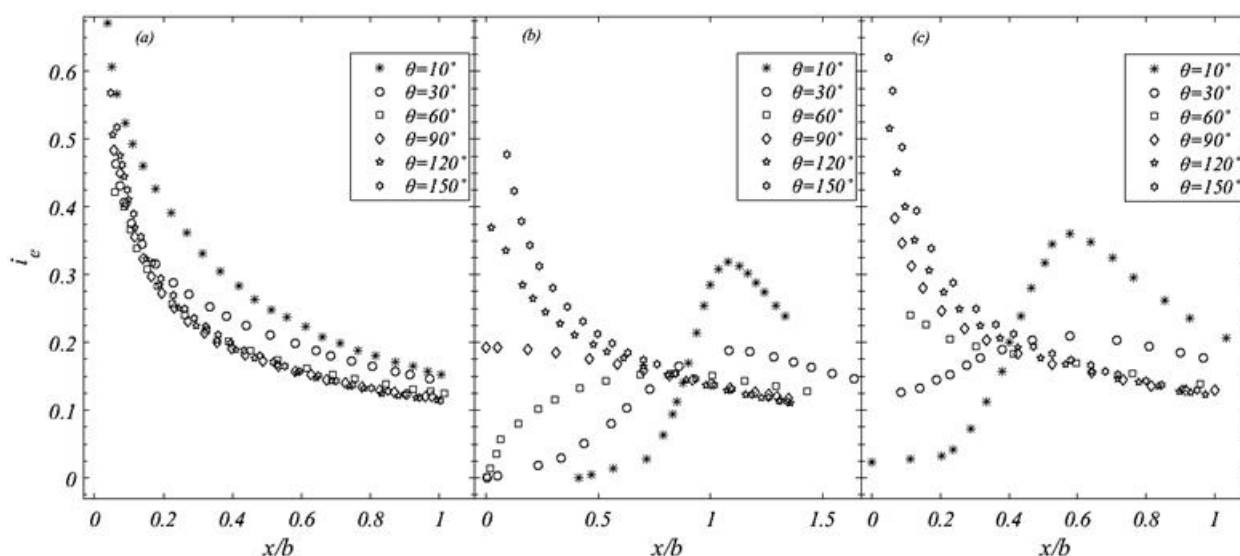
شکل 9 تغییرات گرادیان خروجی در پایین دست سازه نسبت به فاصله از پنجه سد برای زوایای مختلف با استفاده از تئوری نگاشت

همدیس برای $s/b = 1/3$ ، $b_2/b = 0$ (a) ، $b_2/b = 1/2$ (b) و $b_2/b = 1$ (c)



شکل 10 تغییرات گرادیان خروجی در پایین دست سازه نسبت به فاصله از پنجه سد برای زوایای مختلف با استفاده از تئوری نگاشت

همدیس برای $s/b = 2/3$ ، $b_2/b = 0$ (a) ، $b_2/b = 1/2$ (b) و $b_2/b = 1$ (c)



شکل 11 تغییرات گرادیان خروجی در پایین‌دست سازه نسبت به فاصله از پنجه سد برای زوایای مختلف با استفاده از تئوری نگاشت

همدیس برای $s/b = 1$ (a)، $b_2/b = 0$ (b)، $b_2/b = 1/2$ (b) و $b_2/b = 1$ (c)

می‌باشد و برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در وسط کف‌بند ($b_2/b = 1/2$) بهترین زاویه تمایل 90 درجه می‌باشد.

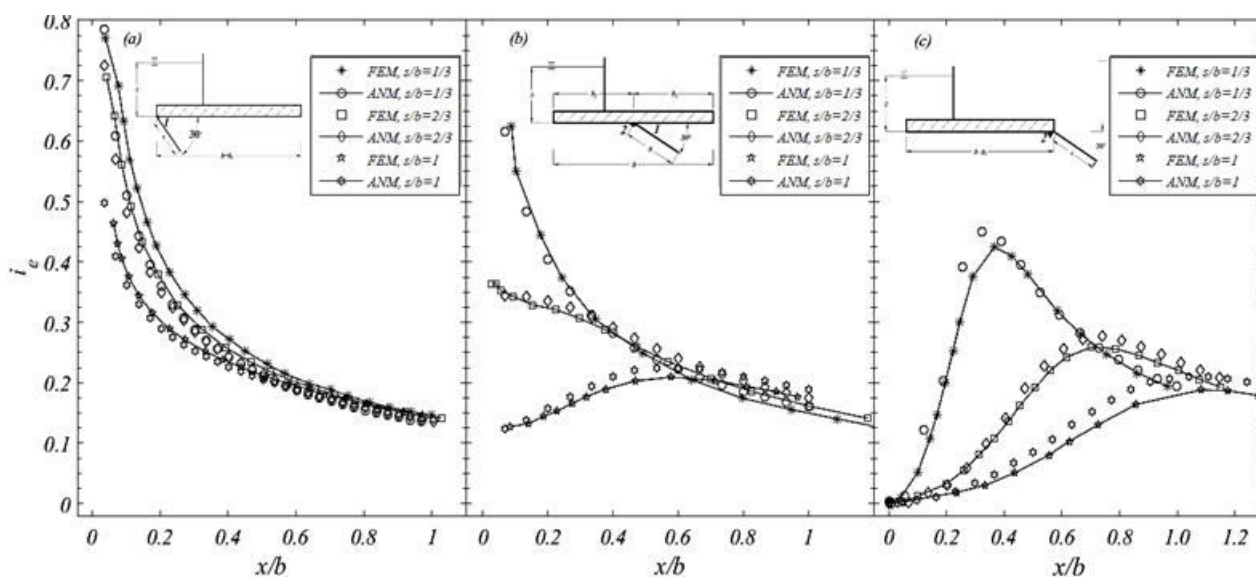
در شکل 11 تغییرات برای $s/b = 1$ نشان داده شده است. اطلاعات شکل‌های 9 تا 11 می‌تواند مبنای تقویت پایین‌دست با استفاده از سنگ چین¹ برای جلوگیری از پدیده رگاب گردد. با توجه به رفتار شکل‌های 9 تا 11 برای حالت $b_2/b = 1$ با افزایش طول دیواره آب‌بند $s/b \geq 1$ رفتار نمودار گرادیان‌های خروجی شبیه حالت $b_2/b = 0$ شکل‌های 9 (a) تا 11 (a) خواهد بود، برای $b_2/b = 1/2$ در طول‌های کوتاه دیواره آب‌بند $s/b \leq 1/3$ این رفتار شبیه حالت $b_2/b = 0$ بوده و برای $2/3 \leq s/b \leq 1$ رفتار آن شبیه حالت $b_2/b = 1$ خواهد شد.

شکل 12 نشان دهنده مقایسه بین روش اجزاء محدود و روش تحلیلی یا تئوری نگاشت همدیس برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در وسط ($b_2/b = 1/2$)، بالادست ($b_2/b = 0$) و پایین‌دست ($b_2/b = 1$) سد انحرافی برای زاویه تمایل 30 درجه می‌باشند. چنانچه در شکل 12 نشان داده شده است دو روش اختلاف اندکی با هم دارند.

شکل 9 نشان دهنده تغییرات گرادیان خروجی در پایین‌دست سازه نسبت به فاصله از پنجه سد برای زوایای مختلف قرارگیری دیواره آب‌بند و $s/b = 1/3$ به روش تئوری نگاشت همدیس می‌باشد. شکل 9 (a) این تغییرات را برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در بالادست سازه (نقطه A یا $b_2/b = 0$) نشان می‌دهد. با افزایش فاصله از پنجه، گرادیان خروجی کاهش می‌یابد، در زوایای 90 تا 120 درجه مقدار اختلاف به حداقل می‌رسد. شکل 9 (b) برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در وسط کف‌بند سازه ($b_2/b = 1/2$) می‌باشد که در این حالت بهترین زاویه برای کاهش گرادیان خروجی 90 درجه خواهد بود. همچنین شکل 9 (c) برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در پایین‌دست سد ($b_2/b = 1$) می‌باشد که در این حالت برای زوایای 60 تا 90 درجه گرادیان خروجی در ابتدا مقادیری کم و به تدریج افزایش را نشان می‌دهد. این افزایش تا $s/b = 0.4$ مشاهده می‌شود و سپس کاهش خواهد یافت. برای زوایای 60 تا 150 درجه این تغییرات بصورت نزولی است، یعنی با افزایش فاصله از پنجه کاهش می‌یابد.

شکل 10 تغییرات گرادیان را برای $s/b = 2/3$ نشان می‌دهند. برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در بالادست ($b_2/b = 0$) بهترین زاویه تمایل 90 درجه می‌باشد، این زاویه برای پایین‌دست ($b_2/b = 1$) بین 30 تا 60 درجه

¹ Riprap



شکل 12 مقایسه تغییرات گرادیان خروجی بین روش اجزاء محدود (FEM) و تئوری نگاشت همدیس (ANM) برای زاویه 30 درجه و $b_2/b = 1$ (c) و $b_2/b = 1/2$ (b) و $b_2/b = 0$ (a)، $s/b = 1/3, 2/3, 1$

6- نتیجه گیری

در بسیاری از اوقات شیب‌دار کردن آب‌بند به سمت وجه بالادست با توجه به اثر مؤثرتر هیدرولیکی آن بر کاهش گرادیان هیدرولیکی امری مرسوم می‌باشد. اگرچه در مقاله حاضر زوایای مورد بررسی از 10 درجه تا 150 درجه با فواصل 30 درجه مورد توجه بوده است، اما اجرای برخی از این زوایا در عمل امکان‌پذیر نمی‌باشد؛ به خصوص زمانی که دیواره به سمت افق میل می‌کند. در مجموع به منظور بررسی کامل تر مسأله از بعد تغییر زاویه آب‌بند و مشاهده رفتار گرادیان هیدرولیکی، این زوایا مورد بررسی قرار گرفتند.

بر اساس نتایج بدست آمده چنین نتیجه‌گیری می‌شود که در مورد تأثیر زاویه تمایل دیواره آب‌بند بر روی میزان زیرفشار در حالت قرارگیری در بالادست سد انحرافی با افزایش طول دیواره آب‌بند کاهش می‌یابد، محاسبات برای $s/b = 1/3, 2/3, 1$ انجام شده که برای $s/b = 1/3, 2/3$ بهترین زاویه تمایل برای کاهش زیرفشار 70 درجه بوده، این مقدار برای $s/b = 2/3$ ، 30 درجه می‌باشد. با افزایش طول دیواره آب‌بند این زاویه کاهش یافته چنان که برای $s/b = 1$ بهترین زاویه بین 10 و 20 درجه خواهد بود. زاویه بهینه قرارگیری دیواره آب‌بند در حالت

بالادست سد انحرافی ($b_2/b = 0$) برای کاهش گرادیان‌های خروجی بین 90 تا 120 درجه بدست آمده که مقدار گرادیان خروجی با افزایش طول دیواره آب‌بند کاهش خواهد یافت.

برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در وسط کف‌بند ($b_2/b = 1/2$) بهترین زاویه از بین زوایای موجود برای کاهش میزان زیرفشار در پایین‌دست دیواره آب‌بند 20 درجه را نشان می‌دهد، که این مقدار با افزایش طول دیواره آب‌بند کاهش می‌یابد که بسته به میزان کاهش مورد نظر می‌توان طول مورد نظر طراحی را انتخاب نمود. همچنین این نکته قابل ذکر خواهد بود که با افزایش طول دیواره آب‌بند میزان زیرفشار در بالادست دیواره آب‌بند افزایش خواهد یافت. زاویه بهینه به منظور کاهش گرادیان‌های خروجی در این حالت برای $s/b = 1/3, 2/3$ بین 90 تا 120 درجه می‌باشد. مقادیر گرادیان در این زوایا نزدیک به هم می‌باشد و برای مقادیر $s/b > 2/3$ این زاویه بین 60 تا 90 درجه خواهد بود. از نمودارهای حاصل برای گرادیان‌های خروجی می‌توان برای تقویت نواحی مستعد پایپینگ در پایین‌دست سازه‌های هیدرولیکی بوسیله مصالح سنگ چین استفاده نمود. برای حالت قرارگیری دیواره آب‌بند در پایین‌دست سد

p	فشار
r	ضریب ثابت نگاشت
s	طول آب بند
s'	خط جریان در نقطه مورد نظر
t	متغیر کمکی
t_i	مختصات نقطه i ام از صفحه فیزیکی در صفحه کمکی
w	تابع پتانسیل مختلط
x	مختصات طولی در صفحه فیزیکی مسأله
y	مختصات عرضی در صفحه فیزیکی مسأله
z	تابع مختلط صفحه فیزیکی مسأله
α_i	زاویه داخلی i ام چند ضلعی نگاشت تبدیل شوارتز-کریستوفل
α	ثابت زاویه چند ضلعی
γ_w	وزن مخصوص آب
λ, λ_1	ثابت جایگزین
θ^*	زاویه آب بند نسبت به افق
v_x	سرعت تراوش در جهت x
v_y	سرعت تراوش در جهت y
$\varphi(x, y)$	پتانسیل سرعت
$\psi(x, y)$	تابع جریان

انحرافی ($b_2/b = 1$) با افزایش زاویه قرارگیری دیواره آب‌بند نسبت به افق میزان زیرفشار ابتدا افزایش یافته و بعد از زاویه 150 درجه برای $s/b = 1/3, 2/3$ کاهش می‌یابد و برای $s/b = 1$ افزایشی خواهد بود. باید گفت که به منظور کاهش زیرفشار، قرار گرفتن دیواره آب‌بند به تنهایی در پایین‌دست سازه مؤثر نخواهد بود، چرا که باعث افزایش زیرفشار در بالادست دیواره آب‌بند خواهد شد. بهترین موقعیت قرارگیری دیواره آب‌بند به منظور کاهش زیرفشار، بالادست سد انحرافی می‌باشد. حداقل زاویه به منظور کاهش گرادیان‌های خروجی از پایین‌دست سد انحرافی برای این حالت بین 30 تا 60 درجه می‌باشد. از مقایسه نمودارها و نتایج بدست آمده از دو روش نگاشت همدیس و روش اجزاء محدود، چنین برداشت گردید که جواب‌های حاصل شده از دو روش تطابق خوبی با هم دارند. از روابط حاصل شده از روش نگاشت همدیس برای محاسبه دستی زیرفشار و گرادیان‌های خروجی در پایین‌دست سازه‌های هیدرولیکی همراه با آب‌بند در موقعیت‌های مختلف و نیز زوایای گوناگون قرارگیری آنها می‌توان استفاده کرد.

8- مراجع

شیخ رضازاده نیکو، ن.، خلیلی شایان، ح. و امیری تکلدانی، ا. (1391). "مطالعه آزمایشگاهی و عددی ابعاد و موقعیت بهینه دیواره‌های سپری، بلانکت و زهکش برای کاهش نیروی زیرفشار، دبی نشت و گرادیان خروجی در پی سدهای انحرافی". یازدهمین کنفرانس هیدرولیک ایران، دانشگاه ارومیه، ارومیه.

مجتهدی، س. ح. و فغفور مغربی، م. (1388). "روش تحلیلی محاسبه نشت از کانال منحنی شکل". مجله آبیاری و زهکشی ایران. شماره 1، جلد 4، بهار 1389. صص. 22-30.

Anonymous (2007). "Seepage modeling with SEEP/W. An engineering methodology". Third Edition, March 2008. GEO-SLOPE International Ltd, Calgary.

Brown, J.W., and Churchill, R. V. (2009). "Complex variables and applications" 8th ed., McGraw Hill Higher Education, Burr Ridge, IL.

Fil'chakov, P. F. (1959). "The theory of filtration beneath hydrotechnical structures", Vol. 1, Izd-vo Akademii nauk Ukrainskoi SSR, Kiev.

Floryan, J.M., and Zemach C. (1986). "Schwarz-Christoffel mappings: a general approach".

7- فهرست علائم

A_i	رأس i ام چند ضلعی
a_i	مقدار ثابت i ام در تبدیل شوارتز-کریستوفل
a	مختصات نقطه 3 از صفحه z بر روی صفحه کمکی t
b_1	فاصله انتهای سازه تا آب بند
b_2	فاصله ابتدای سازه تا آب بند
b	طول کل سازه
c	ضریب ثابت
C	ضریب ثابت نگاشت
$F_1(t)$	تابع تبدیل نگاشت
$F_2(t)$	تابع تبدیل نگاشت
h	بلندای هیدرولیکی
h'	بلندای زیر فشار در نقاط مختلف زیر سازه
i_e	گرادیان خروجی
k	ضریب نفوذپذیری
L_A	مختصات نقطه A از صفحه z بر روی صفحه کمکی t
L_B	مختصات نقطه B از صفحه z بر روی صفحه کمکی t
M, M_1, M_2, N, N_1	ثابت تبدیل شوارتز-کریستوفل

Reddi, N.L. (2003). "*Seepage in soils Principles and Applications*". Published by John Wiley & Sons, Inc.

Veiskarami M. and Fadaie S., (2017), "Stability of supported vertical cuts in granular matters in presence of the seepage flow by a semi-analytical approach", *Scientia Iranica*, Sharif University of Technology Press, 24(2), 537-550.

Zheng-yi, F., and Wu, JTH. (2006). "The epsilon method analysis of seepage beneath an impervious dam with sheet pile on a layered soil". *Canadian Geotechnical Journal* 43:87-96.

Theoretical Division, Los Alamos National Laboratory New Mexico 87545.

Harr, M. E. (1962). "*Groundwater and Seepage*". McGraw-Hill Book Company.

Ijam, A.Z., (1994). "Conformal analysis of seepage below a hydraulic structure with inclined cutoff". *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol 18, 345-353 (1994).

Polubarinova-Kochina, P. Y. (1962). "Theory of groundwater movement". Trans. J. M. Roger de Wiest. Princeton University, Princeton, NJ.